ANALISI 1

Definizioni di funzioni e insiemi 1
-Funzione iniettiva e suriettiva
-Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori
LIMITI **8**
Teorema del confronto (o dei carabinieri) 8
Teorema della permanenza del segno (successioni) 10
Teorema limite del prodotto 11
Funzione crescente e iniettiva e teoremi 12
Rapporto di limiti 14
Continuità **17**
Teorema permanenza del segno (funzioni continue) 19
Teorema degli zeri 22
Teorema di Weierstrass 22
Teorema dei valori intermedi 23
Rapporto incrementale 26
Asintoto verticale e limite destro/sinistro 28
Principio di sostituzione degli infinitesimi 29
"O grandi e o piccoli" 29
Definizione di asintoti (verticali e orizzontali) 30
Teorema fondamentale dell'algebra 31
DERIVATE **32**
Teorema derivabilità e continuità 34
Retta tangente in x0 35
Teorema di Fermat (massimi e minimi relativi) 35
Teorema di Rolle 37
Teorema di Lagrange 37
Derivata della funzione inversa 39
Teorema di De L'Hopital 40
Polinomio di Taylor **41**
INTEGRALI **43**
Teorema della media integrale 44
Teorema dei valori intermedi 45
Formula di integrazione per parti 46
Tecniche di integrazione **47**
-Integrali di polinomi 48
Integrale generalizzato (o improprio) 51
Studiare la convergenza (integrali) 52
SERIE **52**
Criteri di convergenza 53
Teorema intervallo di convergenza (raggio di convergenza) 56
Formula di Stirling 57
EQUAZIONI DIFFERENZIALI **58**
Problema di Cauchy del primo ordine 58
Equazione a variabili separabili 59
Equazioni differenziali lineari e non 59
Equazioni differenziali del primo ordine 59
Equazioni differenziali del secondo ordine 60
Equazioni differenziali di ordine superiore al secondo 62
Numeri complessi **65**
Extra **67**

Suggerimenti per la prova scritta

Mi scuso in anticipo per eventuali imprecisioni nei miei appunti!
Ecco alcuni consigli per affrontare la prova pratica dell'esame di Analisi 1:

-Imparate i limiti, le derivate e gli integrali notevoli. Nella parte A, che punta molto sul ragionamento in poco tempo, spesso viene fatto ricorso a "cose notevoli" magari scritte in modo che ad occhio non si vedano.

-Allenatevi con tante delle prove online sul sito del professore, altrimenti rischiate di arrivare all'esame e non riuscire a finire in 30 minuti. Alla fine le tipologie degli esercizi tendono ad essere sempre le stesse (a parte casi eccezionali), quindi con tante prove prendete la giusta manualità con questi esercizi.

-Fate gli sviluppi notevoli di sin(x), cos(x), e^(x) e log(x). Spesso se ne trovano delle varianti, ma una volta capita la logica che ci sta dietro, si tratta di fare sempre la stessa cosa (e col poco tempo che avete all'esame fa molto comodo!).

-Guardate bene la parte dei miei appunti dedicata alle tecniche di integrazione e ai criteri di convergenza delle serie. Provate a fare anche tanti esercizi legati a questi due argomenti: una volta presa la mano, farete molto presto a capire quale sia il metodo risolutivo più rapido per quel tipo di esercizio.

-La riposta "nessuna delle altre", ossia NA. Se siete sicuri che il vostro procedimento sia giusto e il risultato ottenuto non è fra le altre opzioni, al limite rifate l'esercizio per scrupolo, ma non abbiate timore a selezionare NA. Spesso è la risposta giusta e serve a verificare quanto siete sicuri di quello che sapete.

-Stesso discorso vale per la parte B, dove non ci sono crocette. Anche se vi dovessero venire dei risultati strani, non abbiate paura. L'importante è che il procedimento sia corretto e che abbiate fatto quello che dovevate, in modo che se i risultati sono strani, sia altamente probabile che comunque siano giusti.

-Fate attenzione alle risposte, in particolare sugli esercizi come il calcolo della tangente in un certo punto di una funzione. Spesso vengono fatte delle operazioni matematiche in modo che il risultato non si veda ad occhio, quindi prima di andare nel panico guardate se dal vostro risultato si può ricavare uno di quelli presenti nelle risposte.

-Non snobbate esercizi come quelli legati ai numeri complessi, che potrebbero sembrare facili e quindi di minor importanza. In realtà sono quelli che vi garantiscono qualche punto in ogni prova e che essendo sempre molto simili potete fare in brevissimo tempo!

In bocca al lupo!

ANALISI 1 → Studio di funzioni reali di variabili reali

INSIEME → collezione di oggetti, scatola contenente vari elementi

SIMBOLI:

- $\in$ → "appartiene a"
- $\forall$ → quantificatore universale, "per ogni"
- $\exists$ → "esiste almeno uno"
- $\subseteq$ → "contenuto in o uguale a"
- $\subset$ → "contenuto in ma diverso da", strettamente contenuto
- $\cap$ → "intersecato"
- $\cup$ → "unito"
- $:$ → "tale che"
- $/$ → mega il simbolo
- $[,]$ → intervallo chiuso, estremi inclusi
- $]\,,[$ → intervallo aperto, estremi esclusi
- $\Rightarrow$ → "implica che"
- $\sum$ → sommatoria

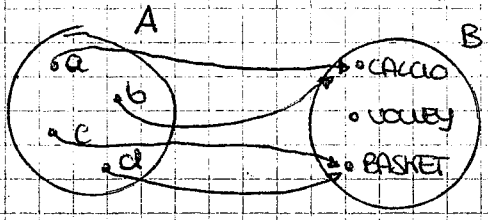
Esempi di insiemi:

- $D = \{x : x^2 < 1\}$
- $E = \{a, b, c, d\}$
- $F = \{\text{parole più lunghe di 100 caratteri}\} = \emptyset$ (INSIEME VUOTO)

DEFINIZIONE FUNZIONE:

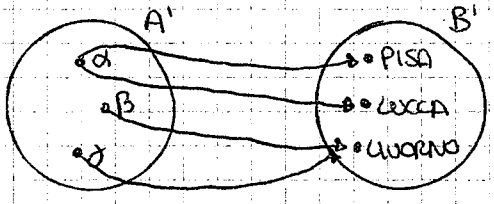
f è una relazione (detta FUNZIONE) che ad ogni a appartenente a A (DOMINIO) associa uno ed uno solo b appartenente a B (CODOMINIO)

Esempi di funzioni:



$f(a) = f(b) = \text{CALCIO}$

$f(c) = f(d) = \text{BASKET}$



NON È UNA FUNZIONE! α può andare sia in LUCCA che in PISA.

PRODOTTO CARTESIANO → elenco delle combinazioni di due insiemi.

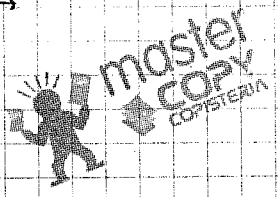
Esempio di combinazioni cartesiane

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (a, CALCIO), (a, VOLLEY), (a, BASKET) \\ (b, CALCIO), (b, VOLLEY), (b, BASKET) \\ (c, CALCIO), (c, VOLLEY), (c, BASKET) \\ (d, CALCIO), (d, VOLLEY), (d, BASKET) \end{Bmatrix}$$

IMMAGINE → • valori di B che sono legati a dei valori di A

• $Im\, f \subseteq B$

$$Im\, f = \{b \in B : \exists\, a \in A \Rightarrow f(a) = b\}$$



FUNZIONE SURGETTIVA → • $Im\, f = B$

• DEFINIZIONE: $\forall b \in B\ \exists a \in A : f(a) = b$

• Una funzione è SURGETTIVA quando tutto B è immagine di A, ossia quando tutti gli elementi di B sono in relazione con gli elementi di A.

FUNZIONE INIETTIVA → • $\forall a_1, a_2 \in A \wedge a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$

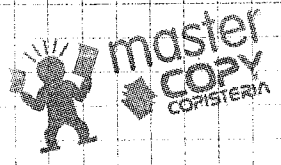
• Una funzione è INIETTIVA quando ad un elemento di A non corrisponde mai lo stesso elemento di B corrispondente già ad un altro elemento di A.
In sostanza, ogni a "ha il suo b".

FUNZIONE BIGETTIVA → • È una funzione sia SURGETTIVA che INIETTIVA.

• È anche detta UNO ad UNO (ONE TO ONE), perché A e B hanno la stessa CARDINALITÀ.

↳ • Si indica con "#" (per esempio #A) ed è la quantità n di elementi di quell'insieme.

• $\#A = \#B$



FUNZIONE INVERSA → • Affinché si possa fare l'inverso di una determinata funzione, essa deve essere BIGETTIVA.

N.B.: Im serve così per poter fare la funzione inversa, è necessario impostare un intervallo, come per sin e arcsin.

• $f: A \to B$
$g: B \to A$ (funzione inversa)

• La funzione inversa di f si indica con f^{-1} (diverso da $\frac{1}{f}$)

FUNZIONE COMPOSTA → • $f(g(x))$

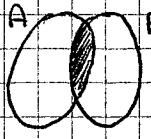
• $Im(g) \subseteq A$ poiché $f: A \to B$, $g: C \to D$

• Esempio di funzione composta:

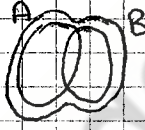
$\sin(x^3)$

$x \xmapsto{g} x^3 \xmapsto{f} \sin(x^3)$

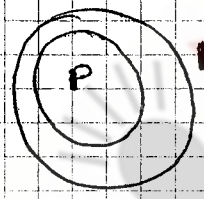
INTERSEZIONE: • $A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$



UNIONE: $A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$



CORRISPONDENZA BIUNIVOCA (FUNZIONE BIGETTIVA) TRA DUE INSIEMI INFINITI:



• Un caso particolare della corrispondenza biunivoca è quando essa avviene tra un insieme infinito (per esempio N, i numeri naturali) e un suo sottoinsieme proprio (per esempio P, i numeri pari).

INSIEMI NUMERI:

- $\mathbb{N}$ → numeri naturali (1, 2, 3, 4...)
- $\mathbb{Z}$ → numeri interi (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...)
- $\mathbb{Q}$ → numeri razionali
- $\mathbb{R}$ → numeri reali (tutti i decimali, periodici e non)

NUMERI RAZIONALI: • Si ottengono da $\frac{p}{q}$, dove $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$

• Si può stabilire una RELAZIONE DI EQUIVALENZA tra $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$ osservando che $p_1 q_2 = p_2 q_1$.

↳ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}_{/\sim}$

master COPY COPISTERIA